

Devoir surveillé de Sciences Physiques n°3 du 18-11-2006

— Durée : 4 heures —

Problème n° 1 – Étude d'un faisceau laser

E3A PC 2005

Données :

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Relation entre opérateurs :

rot (rot \mathbf{A}) = grad div \mathbf{A} – $\Delta \mathbf{A}$

Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes :

$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_x \mathbf{e}_x + \Delta A_y \mathbf{e}_y + \Delta A_z \mathbf{e}_z$

A. Modèle à onde plane

1. Écrire les équations de MAXWELL dans le vide en l'absence de charges et de courants.
2. En déduire les équations de propagations pour le champ électrique \mathbf{E} et pour le champ magnétique \mathbf{B} .

Un faisceau laser peut être modélisé par une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le vide et dans le sens des z croissants. Le champ électrique de l'onde en un point M de cote z est donné par :

$$\mathbf{E}(M, t) = E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$$

où E_0 est un réel positif.

3. Donner la relation entre ω et k (relation de dispersion) et déterminer le champ magnétique de l'onde.
4. Rappeler la définition du vecteur de POYNTING $\mathbf{\Pi}(t)$. Déterminer sa moyenne temporelle $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ pour l'onde étudiée.
5. Quelle est l'expression de la puissance moyenne qui traverse une surface S perpendiculaire à l'axe Oz ? En déduire la densité de puissance J_L (puissance moyenne par unité de surface).
6. Un laser YAG – Nd^{3+} possède une densité de puissance $J_L = 4 \times 10^4 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$. Calculer l'amplitude E_0 du champ électrique correspondant.

B. Modèle du faisceau gaussien

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau du laser dont la section S est en pratique inférieure à 1 mm^2 . Dans le modèle plus réaliste, l'onde électromagnétique du laser (se propageant toujours dans le vide et dans le sens des z croissants) peut être représentée comme une onde de profil gaussien, dont le champ électrique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut être mis sous la forme :

$$\mathbf{E} = \underline{E}(r, z) \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde. Dans cette expression, l'amplitude complexe $\underline{E}(r, z)$ du champ électrique dépend de r et de z et s'écrit :

$$\underline{E}(r, z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right)$$

où z_0 est une constante positive appelée distance de RAYLEIGH et E_0 un réel positif.

7. Montrer que le carré du module de $\underline{E}(r, z)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)$$

avec $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$. Déterminer la constante $w_0 > 0$ en fonction de z_0 et de λ puis montrer que : $A(z)w(z) = A_0 w_0$.

8. Représenter les graphes des fonctions $A(z)$ et $w(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$.
9. Représenter les graphes du module $|\underline{E}(r, z)|$ du champ électrique en fonction de r lorsque $z = 0$, puis pour une valeur fixée $z > 0$. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$?

En pratique, l'amplitude complexe du champ électrique est une fonction lentement variable de r et de z , ce qui signifie qu'à l'échelle de la longueur d'onde λ , les variations de $\underline{E}(r, z)$ sont négligeables. Dans ces conditions, on peut faire l'approximation suivante à propos du champ magnétique :

$$\mathbf{B} \simeq \frac{\underline{E}(r, z)}{c} \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_y$$

10. Calculer la valeur moyenne du vecteur de POYNTING $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ et déterminer la densité de puissance de cette onde $J(r, z) = \|\langle \mathbf{\Pi} \rangle\|$.

Étudions la répartition de $J(r, z)$ dans un plan perpendiculaire à Oz et situé à la cote z et notons $J_{max}(z)$ la valeur maximale de J dans ce plan. Le rayon $R(z)$ du faisceau laser à la cote z est défini comme la valeur de r pour laquelle $J = \frac{J_{max}(z)}{e^2}$ où $e = 2,71$ est la base du logarithme népérien.

11. Déterminer l'expression de ce rayon en fonction de $w(z)$.

12. Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau a la forme d'un cône de sommet O et de demi-angle au sommet β , qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0 , puis en fonction de w_0 et λ . L'angle β est appelé *divergence* du faisceau laser.

13. Application numérique : dans le cas d'un laser YAG - Nd^{3+} , possédant pour caractéristiques : $w_0 = 0,50$ mm et $\lambda = 1,06$ μm , déterminer z_0 et β en degrés. Reproduire le même calcul pour un laser CO_2 possédant le même w_0 mais de longueur d'onde $\lambda = 10,6$ μm . Conclure.

C. Absorption de l'énergie du laser dans un milieu métallique

L'interaction d'une onde électromagnétique avec un métal se fait essentiellement par l'intermédiaire des électrons de conduction. dans cette partie, nous modéliserons un métal homogène et électriquement neutre ($\rho_{el} = 0$) comme un milieu ayant les mêmes propriétés que le vide (permittivité ϵ_0 et perméabilité μ_0) et constitué d'un ensemble d'électrons de conduction, de charge $-e$, de masse m et de densité uniforme N (nombre d'électrons par unité de volume). Ce métal est fixe par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Étant donné un électron de vitesse \mathbf{v} , son interaction avec le milieu métallique est modélisée par une force de frottement fluide de la forme $\mathbf{F} = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v}$ où τ est un coefficient positif. Supposons que le métal soit soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , de la forme : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ où \mathbf{E}_0 est un vecteur complexe constant.

14. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron de conduction. Quelle est la dimension de τ ?

En régime sinusoïdal permanent, la vitesse d'un électron s'écrit en notation complexe : $\mathbf{v} = \mathbf{V}(i\omega) \exp(-i\omega t)$.

15. Déterminer l'expression de $\mathbf{V}(i\omega)$ en fonction de $i\omega$, e , τ , m et de \mathbf{E}_0 .

16. En déduire le vecteur densité de courant électrique \mathbf{j} sous la forme : $\mathbf{j} = \sigma(i\omega) \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ et expliciter la grandeur complexe $\sigma(i\omega)$ en fonction des données du problème. Quelle est la nature de ce milieu (du point de vue des propriétés électromagnétiques) ? Que représente physiquement $\sigma(i\omega)$?

Étudions maintenant la propagation d'une onde électromagnétique dans ce milieu. Supposons que ce métal remplit tout le demi-espace $z > 0$ et que le champ électrique de l'onde peut s'écrire $\mathbf{E}(M, t) = f(z) \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_x$ où $f(z)$ est une fonction complexe à déterminer. En tout point du métal existe une densité de courant de conduction électrique reliée au champ électrique par l'équation de la question 16.

17. Écrire les équations de MAXWELL dans ce milieu. En déduire l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par le champ électrique.

18. Montrer que la fonction $f(z)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 f = 0 \quad \text{avec} \quad n^2 = 1 + \frac{i(\tau\omega_p)^2}{\tau\omega(1 - i\tau\omega)}$$

On introduira la pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$ appelée pulsation plasma. Quelle est la signification de n ?

19. Calculer la valeur numérique de ω_p , en prenant l'exemple de l'aluminium pour lequel : $N = 1,81 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$, et $\tau = 8 \times 10^{-15} \text{ SI}$.

Dans la suite du problème, nous poserons $n = n' + in''$ où n' et n'' sont deux nombres réels ($n' > 0$) et $k = \omega/c$.

20. Déterminer la solution complète de l'équation différentielle de la question 18 sachant que l'onde se propage dans le sens des z croissants et en posant $A_0 = f(z = 0)$. Quel est le phénomène physique généré par l'existence de n'' ? Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ de cette onde ?

21. Déterminer numériquement n^2 , puis calculer la valeur numérique de n' sachant que $n'' = 13,41$ dans le cas de l'aluminium et pour la longueur d'onde du laser YAG – Nd³⁺ ($\lambda = 1,06 \mu\text{m}$). Commenter ce résultat.

22. Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.

23. En déduire la valeur moyenne du vecteur de POYNTING $\langle \Pi \rangle$. Quelle est la puissance moyenne qui traverse une surface S perpendiculaire à Oz et située à la cote $z > 0$? Écrire cette puissance sous la forme $P(z) = P_0 \exp(-\alpha z)$, en donnant l'expression de P_0 en fonction de μ_0 , c , $|A_0|^2$, n' et S , puis celle du paramètre réel α (appelé coefficient d'absorption) en fonction de k et n'' .

24. Déterminer la valeur numérique de α pour l'aluminium et une pulsation ω correspondant au laser YAG – Nd³⁺. En déduire un ordre de grandeur de la profondeur de pénétration de l'énergie de ce laser dans un échantillon d'aluminium. Commenter ce résultat.

Problème n° 2 – Accident de décompression

Mines MP 2004

Lors d'une plongée, le détendeur équilibre la pression de l'air inhalé dans les poumons avec celle de l'eau environnante. Cet air est principalement composé d'oxygène (21%) et d'azote (78%). L'azote est un gaz diluant qui, au cours de la descente, se dissout par diffusion dans le sang puis dans les tissus. A température constante et à saturation, la quantité de gaz dissout dans un liquide est proportionnelle à la pression exercée par ce gaz sur le liquide (loi de Henry); la quantité d'azote qui se dissout dans l'organisme d'un plongeur augmente donc avec la profondeur. Ce phénomène engendre des problèmes lorsque le plongeur remonte trop vite à la surface : l'azote dissous, sous l'effet de la diminution de la pression, reprend sa forme gazeuse. Des bulles apparaissent alors dans l'organisme du plongeur. Dans 90% des cas, les accidents de décompression sont localisés dans les articulations, particulièrement au niveau des tissus cartilagineux. Une hypothèse couramment admise (dite hypothèse de HEMPLEMAN) est que ces accidents surviennent lorsque la masse d'azote stockée dans les cartilages dépasse une valeur critique.

1. Le cartilage n'étant pas irrigué par le sang, les échanges d'azote entre sang et cartilage ont lieu uniquement par diffusion, supposée unidirectionnelle, suivant Ox , voir la figure 1.

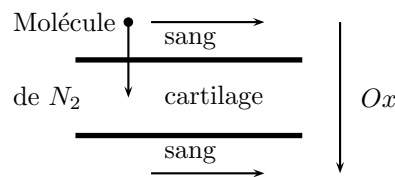


FIG. 1 – Stockage d'azote

La concentration d'azote $C(x, t)$ dans le cartilage d'épaisseur L ($0 \leq x \leq L$) est supposée régie par l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

où la constante D est le coefficient de diffusion. On cherche, pour cette équation, des solutions de la forme $C(x, t) = K + f(x)g(t)$, où K est une constante. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. On introduira dans ces équations une constante q homogène à l'inverse d'une longueur (et qui n'intervient, à ce stade, que par son carré).

2. Montrer que, q étant fixé, la solution physiquement acceptable de l'équation différentielle, $C_q(x, t)$, peut s'écrire :

$$C_q(x, t) = K_q + [A_q \cos(qx) + B_q \sin(qx)] \exp(-Dq^2 t) = K_q + F_q(x, t)$$

3. Le plongeur atteint la cote z au temps $t = 0$, puis reste à cette profondeur; le temps mis pour atteindre cette cote est négligeable. On note $C_q(x, t)$ la concentration en azote du sang du plongeur à la profondeur z . Déterminer les valeurs autorisées de q et les expressions de K_q , A_q et B_q , les conditions aux limites étant $C_q(0, t) = C_q(L, t) = C_s(z)$.

4. Imposons à présent à la solution de l'équation de diffusion la forme :

$$C(x, t) = K + \sum_q F_q(x, t)$$

où $F_q(x, t)$, introduit dans l'équation de la question 2, est une fonction périodique de la variable x . Quelle est la période spatiale de cette fonction ?

Déterminer alors l'expression de $C(x, t)$ à la profondeur z . On notera C_0 la concentration à saturation, homogène et à l'air libre, de l'azote dans le sang et on utilisera la condition initiale $C(x, 0) = C_0$.

Rappel :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)], \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Problème n° 3 – Comportement thermique d'une dalle solaire

E4A PSI 2000

On se propose d'étudier le comportement dynamique d'un système de chauffage par plancher solaire direct mixte, utilisant l'énergie solaire comme chauffage de base et la combustion du gaz comme chauffage d'appoint. On étudie dans cette partie le comportement thermique d'une dalle épaisse de béton soumise à un flux de chaleur variable.

Le schéma hydraulique de principe de l'installation de chauffage solaire (figure 2) montre que le fluide caloporteur (glycol) mis en circulation par la pompe \mathcal{P} et chauffé par le flux solaire dans les panneaux solaires \mathcal{S} passe directement dans les tubes de polyéthylène noyés au fond de la dalle solaire \mathcal{D} . Celle-ci forme le plancher du rez-de-chaussée du bâtiment à chauffer; elle est en béton dense, de propriétés thermophysiques homogènes (conductivité thermique λ , masse volumique ρ , chaleur massique c).

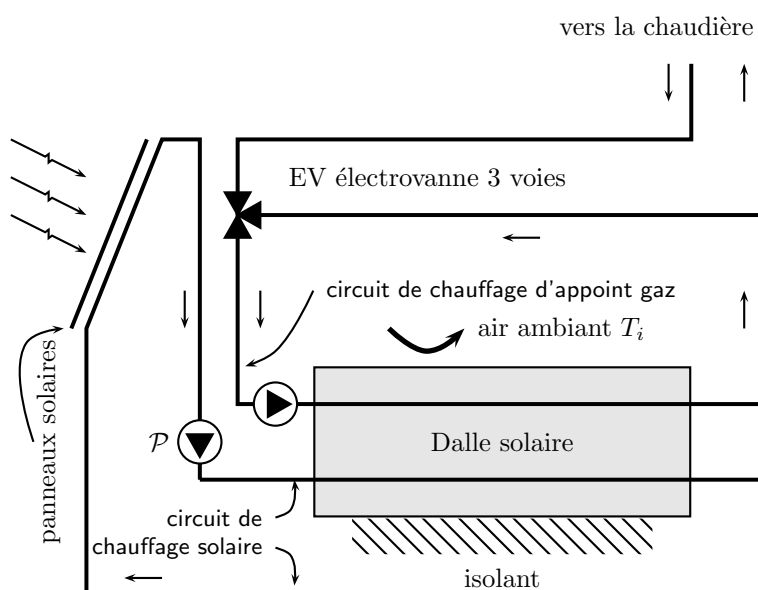


FIG. 2 – Schéma hydraulique de l'installation

On s'intéresse ici au comportement dynamique de la dalle solaire d'épaisseur H , que l'on peut caractériser en régime stationnaire par sa réponse à une densité de flux de chaleur $j_0(t)$ imposée sur sa face inférieure. Les dimensions transversales de la dalle sont très grandes devant H , de sorte que le problème peut être supposé unidimensionnel. La direction perpendiculaire à la surface S de la dalle est repérée par la cote verticale x à partir du fond (figure 3). La température de l'air ambiant dans le bâtiment est homogène, de valeur moyenne T_i . La face inférieure de la dalle est parfaitement isolée thermiquement.

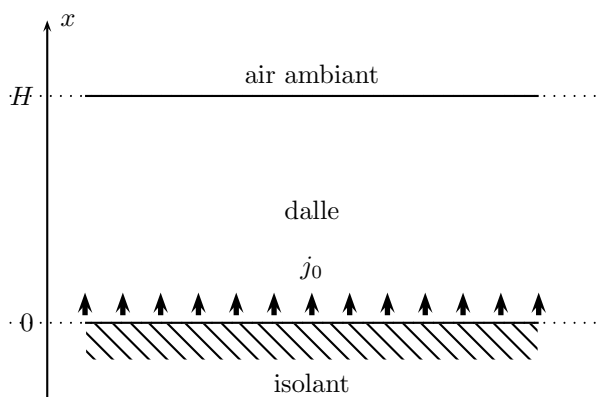


FIG. 3 – Température dans la dalle

A. Introduction

1. Rappeler la loi de Fourier unidimensionnelle liant la densité du flux de chaleur $j(x, t)$ et la température $T(x, t)$.

Quelle est la dimension de j ? En déduire l'unité de la conductivité thermique λ .

2. En effectuant un bilan thermique de la tranche élémentaire $[x, x + dx]$ de la dalle entre un instant t quelconque et $t + dt$, établir les équations différentielles vérifiées par j et par T .

Exprimer la diffusivité thermique a de la dalle, à l'aide des grandeurs thermophysiques de la dalle. Quelle est l'unité de a ?

3. L'échange de chaleur par convection entre la face supérieure de la dalle et l'air ambiant est bien représenté par la loi de Newton, $j(H, t) = h[T(H, t) - T_i]$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface. Quelle est l'unité de h ? De quelles grandeurs et de quels phénomènes physiques dépend ce coefficient?

B. Analyse dimensionnelle

Le système est caractérisé par huit grandeurs physiques $T - T_i, j_0, h, \lambda, a, H, x$ et t dont les unités sont formées à partir de quatre unités seulement (m, s, K, W). D'après le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM, il s'ensuit que le problème physique ne dépend que de $8 - 4 = 4$ nombres Π sans dimension, dont un évident, $\Pi_1 = x/H$.

4. En écrivant une équation aux dimensions reliant les huit grandeurs physiques sous la forme générale $(T - T_i)^m j_0^n h^p \lambda^q a^r t^u H^v x^w = 1$, exprimer n, p, u et v en fonction de m, q, r et w .

Montrer que les trois autres nombres adimensionnels sont $\Pi_2 = \frac{h(T - T_i)}{j_0}$, $\Pi_3 = \frac{at}{H^2}$ (nombre de Fourier) et

$$\Pi_4 = \frac{hH}{\lambda} \text{ (nombre de Biot).}$$

5. En déduire l'expression du temps caractéristique τ_d de diffusion de la chaleur à travers la dalle en fonction de H et a . Calculer sa valeur (en heures) pour $H = 26$ cm et $a = 9 \times 10^{-7}$ SI.

En déduire de même une longueur caractéristique L_d de diffusion de la chaleur dans la dalle au bout de 24 heures.

6. Quelle signification physique peut-on donner au nombre de BIOT Π_4 ? Quelles hypothèses peut-on adopter pour déterminer le comportement d'un dispositif dont le nombre de BIOT est, soit très petit devant 1, soit très grand devant 1? À l'aide des données, calculer Π_4 . Faut-il tenir compte de l'épaisseur H dans le problème thermique étudié?

Données : $h = 6,7$ SI, $\lambda = 1,75$ SI, $a = 9 \times 10^{-7}$ SI et $H = 26$ cm.

C. Régime permanent

On suppose qu'un flux constant j_0 est maintenu en $x = 0$. Après un temps très long $t \gg \tau_d$, on peut considérer le régime comme établi, de sorte que $j(x)$ et $T(x)$ sont indépendants du temps.

7. Montrer que le profil thermique de la dalle est alors donné par $T(x) = T_i + j_0 \left(\frac{H}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) - \frac{j_0}{\lambda} x$.

Calculer l'écart de température $T(H) - T_i$, pour $j_0 = 20,1$ W · m⁻² et $h = 6,7$ SI.

D. Régime périodique

L'irradiation solaire reçue par les panneaux solaires lors d'une journée de temps clair est une fonction sinusoïdale du temps. Il en est de même en première approximation pour le flux de chaleur émis par le circuit solaire au fond de la dalle, de sorte que $j(0, t) = j_0 (\delta + \sin \omega t)$ où δ est fonction de la déclinaison solaire et donc du numéro du jour dans l'année, t le temps écoulé depuis le lever du soleil, ω la pulsation du cycle jour-nuit de période $J = 1$ jour solaire ($J = 24$ heures).

8. Dans la suite des calculs, on se placera aux équinoxes. Rappelez la signification de ce terme. Que vaut alors δ ?

On étudie la réponse générale de la dalle à une sollicitation thermique normalisée définie par $\bar{j}(0, t) = j_0 \exp i\omega t$, avec $j_0 = 1$ W · m⁻². Afin de simplifier cette étude, la dalle sera considérée comme un milieu infiniment épais. La validité de cette hypothèse sera examinée plus loin.

9. Résoudre l'équation établie en 2 en posant $\bar{j}(x, t) = \bar{f}(t) \times \bar{g}(x)$, les fonctions $\bar{j}(x, t)$, $\bar{f}(t)$ et $\bar{g}(x)$ étant supposées complexes.

En déduire que l'expression de la densité du flux de chaleur $j(x, t)$ réelle, en réponse à une sollicitation sinusoïdale $j_1(0, t) = j_0 \cos \omega t$, est de la forme $j_1(x, t) = j_0 \exp(-\alpha x) \cos(\omega t - \alpha x)$ où α est une constante positive que l'on exprimera en fonction de a et ω .

Interpréter physiquement le phénomène décrit par cette expression, et expliquer en quoi la dalle est un milieu thermiquement dispersif.

10. Calculer le rapport de l'amplitude de $j(H, t)$ à celle de la densité du flux $j(0, t)$, ainsi que le temps caractéristique τ_p de propagation de la chaleur sur la distance H .

11. Sur une période de plusieurs jours de ciel clair, $j(0, t)$ peut être considérée comme une fonction périodique du temps, de période J (figure 4), dont le maximum correspond au midi solaire. $j(0, t)$ peut alors s'écrire $j(0, t) = j_0 \left[\frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1} \right]$.

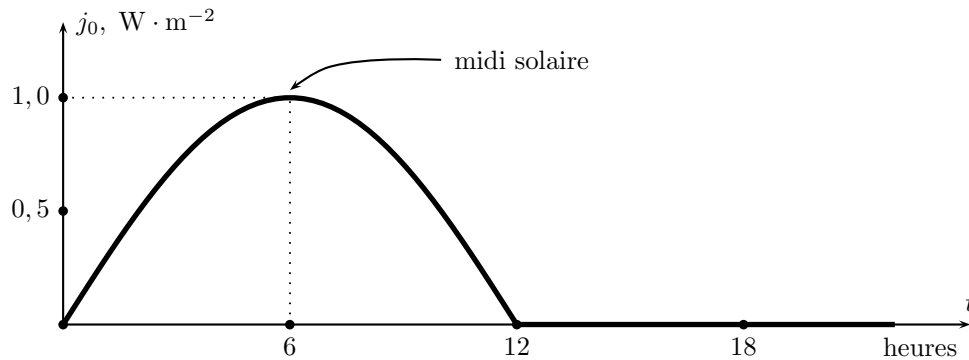


FIG. 4 – Fonction $j(0, t)$

Expliquer l'origine de cette expression.

E. Influence des conditions aux limites

12. La solution obtenue précédemment en considérant la dalle comme infiniment épaisse est représentée sur la figure 5 à gauche. Expliquer la forme du graphe $j(H, t)$ comparée à celle de $j(0, t)$. Déterminer graphiquement le décalage horaire Δt_1 entre le maximum du flux en $x = H$ et le midi solaire, ainsi que l'amplitude crête à crête. Comparer aux valeurs obtenues au 10.

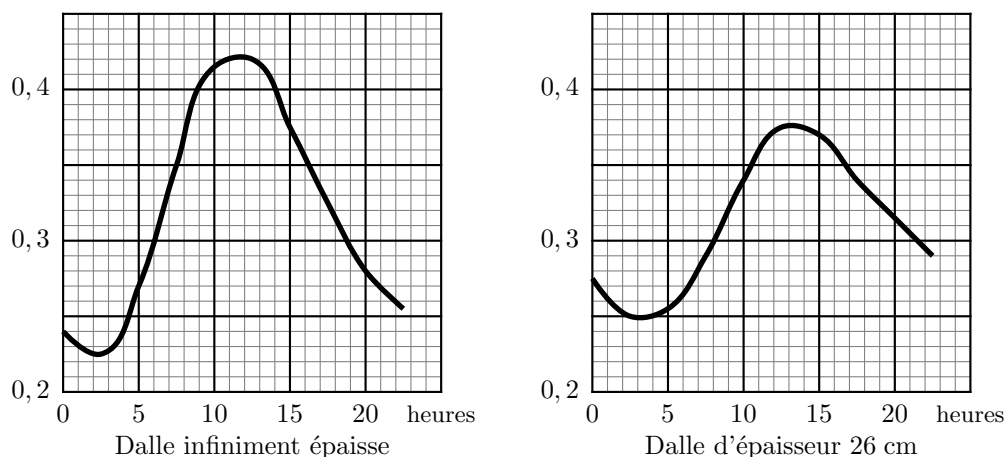


FIG. 5 – Densité de flux de chaleur en $x = 26$ cm dans la dalle, par temps clair, pour $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ d'amplitude injecté en $x = 0$.

13. On tient compte maintenant de l'épaisseur finie H de la dalle et de la dissipation de sa chaleur à sa surface. Les calculs (assez lourds) conduisent à la solution représentée à la figure 5 à droite. Déterminer graphiquement le décalage horaire Δt_2 entre le maximum du flux en $x = H$ et le midi solaire, ainsi que l'amplitude crête à crête. Comparer aux valeurs obtenues au 12 et expliquer physiquement leur écart. Quelles conclusions peut-on tirer de ces comparaisons sur le choix du modèle de dalle (épaisseur finie ou infinie) pour les calculs de bilan énergétique ?